

§11. Интегрирование тригонометрических функций.

11.1. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Рассмотрим интегралы вида: $\int R(\sin x, \cos x) dx$
(R- рациональная функция)

Такие интегралы могут быть сведены к интегралам от рациональной функции заменой переменной при помощи универсальной тригонометрической подстановки:

$\boxed{\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t}$ - универсальная тригонометрическая подстановка.

Основываясь на формулах тригонометрии, имеем:

$$\boxed{\sin x = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$\boxed{\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$\boxed{dx = \frac{2dt}{1+t^2}}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{9 + 8\cos x + \sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(9 + 8 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} \right)} =$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ t = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(\frac{9+9t^2+8-8t^2+2t}{1+t^2} \right)} = \int \frac{2dt}{t^2+2t+17} = 2 \int \frac{dt}{(t^2+2t+1)-1+17} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{(t+1)^2+4^2} = 2 \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{4} + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{4} + C$$

11.2. Интегралы вида: $\int \sin^n x dx$; $\int \cos^n x dx$

Находят с использованием рекуррентных (возвращающихся) формул:

$$\int \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx - \frac{1}{n} \cos x \cdot \sin^{n-1} x$$

$$\int \cos^n x \cdot dx = \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \cdot dx + \frac{1}{n} \sin x \cdot \cos^{n-1} x$$

Пример.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{4-1}{4} \int \sin^{4-2} x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^{4-1} x = \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x =$$

$$= \frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} \int \sin^0 x \cdot dx - \frac{1}{2} \cos x \cdot \sin x \right) - \frac{1}{4} \cos x \cdot \sin^3 x = \frac{3}{8} x - \frac{3}{8} \sin x \cdot \cos x - \frac{1}{4} \sin^3 x \cdot \cos x + C$$

11.3. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x \cdot dx$, где

n и **m** - целые числа, причем **одно** из них **нечетное**.

Интегралы берутся с помощью формул:

1. $\cos x \cdot dx = d(\sin x)$

2. $\sin x \cdot dx = -d(\cos x)$

3. $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

4. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

Пример.

$$\int \sin^5 x \cdot \cos^4 x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot \sin x \cdot dx = -\int \sin^4 x \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int (1 - \cos^2 x)^2 \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\int (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) \cdot \cos^4 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\int \cos^4 x \cdot d(\cos x) + 2\int \cos^6 x \cdot d(\cos x) - \int \cos^8 x \cdot d(\cos x) =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + 2\frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^9 x}{9} + c$$

11.4. Интегралы вида: $\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx$, где

n и **m** – целые числа, но **оба четные**

Применяются формулы понижения степени:

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}};$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}};$$

$$\boxed{\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x}$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cdot \cos^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4} \int (1 - \cos^2 2x) dx = \frac{1}{4} \int \sin^2 2x dx = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \frac{1}{8} \int (1 - \cos 4x) dx = \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x dx = \frac{1}{8} x - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin 4x + c = \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \cdot \sin 4x + c}} \end{aligned}$$

11.5. Интегралы вида: $\boxed{\int \sin^n x \cdot \cos^m x dx}$, где

n и m – целые числа, но отрицательные.

Используется подстановка: $\boxed{\operatorname{tg} x = t}$

Выведем формулы для $\sin^2 x$; $\cos^2 x$; dx

$$1. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \quad \boxed{\cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}}$$

$$2. \sin^2 x = \frac{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x \cdot \cos^2 x = t^2 \cdot \frac{1}{1 + t^2} = \frac{t^2}{1 + t^2}$$

$$\boxed{\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}}$$

$$3. \operatorname{tg} x = t \Rightarrow x = \operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \frac{t' dt}{1+t^2} \quad \boxed{dx = \frac{dt}{1+t^2}}$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x}.$$

Пусть: $\left| \begin{array}{l} \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2} \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2} \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \quad t = \operatorname{tg} x \end{array} \right|$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6 \sin x \cdot \cos x - 16 \cos^2 x} = \int \frac{dt}{(1+t)^2 \left(\frac{t^2}{1+t^2} + 6 \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - 16 \cdot \frac{1}{1+t^2} \right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 6t - 16} = \int \frac{dt}{(t^2 + 6t + 9) - 9 - 16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2 - 25} = \frac{1}{2 \cdot 5} \ln \left| \frac{t+3-5}{t+3+5} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{10} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 8} \right| + C$$

При помощи этой же подстановки берутся интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$.

11.6. Интегралы вида: $\int \sin nx \cdot \cos mx dx$;

$\int \cos nx \cdot \cos mx dx$; $\int \sin nx \cdot \sin mx dx$.

При интегрировании функций такого вида используются следующие формулы:

$$1. \sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

$$2. \cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$3. \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \sin 11x dx &= \frac{1}{2} \int (\cos(x - 11x) - \cos(x + 11x)) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 10x - \cos 12x) dx = \\ &= \frac{1}{20} \sin 10x - \frac{1}{24} \sin 12x + C \end{aligned}$$

11.7. Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^n x \cdot \sec^{2m} x dx$, где

n и m - целые числа

При решении используются формулы:

$$1. \sec^2 x dx = d(\operatorname{tg} x)$$

$$2. \operatorname{cosec}^2 x dx = -d(\operatorname{ctg} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

Пример.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3 x dx &= \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x dx = \int \operatorname{tg} x (\sec^2 x - 1) dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \sec^2 x dx - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) - \int \operatorname{tg} x dx = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C \end{aligned}$$

11.8. Интегралы вида: $\int \operatorname{tg}^{2m-1} x \cdot \sec^m x dx$

Используются формулы:

$$1. \sec x \cdot \operatorname{tg} x dx = d(\sec x)$$

$$2. \operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{ctg} x dx = -d(\operatorname{cosec} x)$$

$$3. 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$$

$$4. 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x$$

§12. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

12.1. Тригонометрические подстановки.

1) $\int R(x; \sqrt{a^2 + x^2}) dx$ применяется подстановка:

$$x = a \cdot \operatorname{tg} t \quad ; \quad dx = a \cdot \frac{dt}{\cos^2 t} \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{tg} t \quad ; \quad t = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$$

2) $\int R(x; \sqrt{a^2 - x^2}) dx \Rightarrow$

$$x = a \cdot \sin t \quad ; \quad dx = a \cos t dt \quad ; \quad \frac{x}{a} = \sin t \quad ; \quad t = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a}$$

3) $\int R(x; \sqrt{x^2 - a^2}) dx$

$$x = a \cdot \operatorname{sect} \quad ; \quad dx = a \operatorname{sect} \cdot \operatorname{tgt} \cdot d \cdot t \quad ; \quad \frac{x}{a} = \operatorname{sect} \quad ; \quad t = \operatorname{arcsec} \frac{x}{a}$$

Замечание: эти подстановки не единственные. В случае (1) можно было обозначить $x = a \cdot \operatorname{ctgt}$; во (2) - $x = a \cdot \operatorname{cost}$

Примеры.

1)

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} = \left. \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tgt} \\ dx = \frac{2dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} \frac{x}{2} \end{array} \right| = \int \frac{\cancel{2} dt}{\cancel{2} t dt \cdot \sqrt{4 + 4 \operatorname{tg}^2 t \cdot \cos^2 t}} = \int \frac{dt \cdot \cancel{\cos t}}{\sin t \cdot \cos \cancel{t} \cdot 2\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sin t \cdot \cancel{\cos t} \cdot \operatorname{sect}} = \frac{1}{2} \int \operatorname{cosect} \cdot dt = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{2}}{2} \right| + C$$

2)

$$\int x^2 \cdot \sqrt{9-x^2} dx = \left. \begin{array}{l} x = 3\sin t \\ dx = 3\cos t dt \\ t = \arcsin \frac{x}{3} \end{array} \right| = \int 9\sin^2 t \cdot \sqrt{9-9\sin^2 t} \cdot 3\cos t dt = 81 \int \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{81}{4} \int 4\sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \frac{81}{4} \int \sin^2 2t dt = \frac{81}{4} \int \frac{1-\cos 4t}{2} dt = \frac{81}{8} \int (1-\cos 4t) dt =$$

$$= \frac{81}{8} \int dt - \frac{81}{8} \cdot \frac{1}{4} \int \cos 4t d(4t) = \frac{81}{8} t - \frac{81}{32} \sin 4t + C =$$

$$= \frac{81}{8} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{81}{32} \sin \left(4 \arcsin \frac{x}{3} \right) + C$$

3)

$$\int x \cdot \sqrt{x^2-16} dx = \left. \begin{array}{l} x = 4\sec t \\ dx = 4\sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt \\ t = \operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \end{array} \right| = \int 4\sec t \cdot \sqrt{16\sec^2 t - 16} \cdot 4\sec t \cdot \operatorname{tg} t \cdot dt =$$

$$= 64 \int \sec^2 t \cdot \operatorname{tg}^2 t dt = 64 \int \operatorname{tg}^2 t d(\operatorname{tg} t) = 64 \frac{\operatorname{tg}^3 t}{3} + C = \frac{64}{3} \cdot \operatorname{tg}^3 \left(\operatorname{arc} \sec \frac{x}{4} \right) + C$$

12.2. Интегрирование функций, содержащих дробные степени одного и того же аргумента.

$\int R(x; x^\alpha; x^\beta; \dots x^\gamma) dx$, где α, β, γ - рациональные дроби

Такие интегралы берутся подстановкой:

$$\boxed{\begin{matrix} x = t^n & ; & t = \sqrt[n]{x} \\ dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt \end{matrix}}, \text{ где } \mathbf{n} - \text{наименьший общий знаменатель дробей } \alpha, \beta, \gamma.$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} \cdot 6t^5 dt}{\sqrt[3]{t^{12}} - \sqrt{t^6}} = 6 \int \frac{t^2 \cdot t^5 dt}{t^4 - t^3} = 6 \int \frac{t^7 dt}{t^3(t-1)} = 6 \int \frac{t^4 dt}{t-1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{3}; \quad \beta = \frac{2}{3}; \quad \gamma = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} -\frac{t^4}{t^4 - t^3} \\ -\frac{t^3}{t^3} \\ -\frac{t^3 - t^2}{t^2} \\ -\frac{t^2 - t}{t} \\ -\frac{t-1}{1} \end{array} \right| \frac{t-1}{t^3 + t^2 + t + 1}$$

$$n = 6$$

$$x = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$t = \sqrt[6]{x}$$

$$= 6 \int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln|t-1| \right) + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[6]{x^4} + 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} + 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln|\sqrt[6]{x}-1| + C$$

12.3. Интегрирование функций, содержащих дробные степени линейных функций аргумента.

$$\int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\alpha; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\beta; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^\gamma \right) dx$$

Используется подстановка:

$$\left(\frac{ax+b}{cx+d} \right) = t^n \quad ; \quad \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)' dx = n \cdot t^{n-1} \cdot dt$$

$$; \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

где **n**- наименьший общий знаменатель дробей α, β, γ .

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2} + \sqrt[3]{x+2}} = \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6} + \sqrt[3]{t^6}} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^3 + t^2} = 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2(t+1)} = 6 \int \frac{t^3 dt}{t+1} =$$

$$\alpha = \frac{1}{2}; \quad \beta = \frac{1}{3} \quad \left| \begin{array}{l} - \frac{t^3}{t^3 + t^2} \quad \left| \frac{t+1}{t^2 - t + 1} \right. \\ - \frac{-t^2}{-t^2 - t} \quad \left| \frac{t+1}{-1} \right. \\ - \frac{-t^2 - t}{t} \quad \left| \frac{t+1}{-1} \right. \\ - \frac{t+1}{-1} \end{array} \right.$$

$$n = 6$$

$$x + 2 = t^6$$

$$dx = 6t^5 dt$$

$$t = \sqrt[6]{x+2}$$

$$= 6 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt = 6 \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1| \right) + C =$$

$$= 2\sqrt[6]{(x+2)^3} - 3\sqrt[6]{(x+2)^2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x+2} - 3\sqrt[3]{x+2} + 6\sqrt[6]{x+2} - 6\ln|\sqrt[6]{x+2} + 1| + C$$

§13. Интегрирование функций, зависящих от показательной функции.

$$\boxed{\int R(a^x) dx} \quad ; \quad \boxed{\int R(e^x) dx}$$

Интегралы такого вида берутся подстановкой:

$$\boxed{a^x = t} \quad ; \quad \text{прологарифмируем}$$

$$\ln a^x = \ln t$$

$$x \cdot \ln a = \ln t$$

$$\boxed{x = \frac{\ln t}{\ln a}} \quad ; \quad \boxed{dx = \frac{dt}{t \cdot \ln a}}$$

Пример $\int \frac{3^x dx}{1+9^x} = \int \frac{\cancel{t} \cdot dt}{\cancel{t} \cdot \ln 3 (1+t^2)} = \frac{1}{\ln 3} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctgt} + C =$

$$\left. \begin{array}{l} 3^x = t \\ x = \frac{\ln t}{\ln 3} \\ dx = \frac{dt}{t \cdot \ln 3} \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3} \cdot \operatorname{arctg} 3^x + C$$

§14 Заключительные замечания

1. Нахождение неопределенного интеграла основывается на сведении его к табличному.

Существует специальный справочник по неопределенному интегралу.

2. Если интеграл найден различными способами форма ответов будет разной, но как ранее было доказано, эти ответы отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое.

Например

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x dx}{\operatorname{Cos}^3 x} = -\int \operatorname{Cos}^{-3} x d(\operatorname{Cos} x) = -\frac{\operatorname{Cos}^2 x}{-2} + C = \frac{1}{2\operatorname{Cos}^2 x} + C_1$$

$$\int \frac{\operatorname{Sin} x dx}{\operatorname{Cos}^3 x} = \int \frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \cdot \frac{1}{\operatorname{Cos}^2 x} \cdot dx = \int \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{Sec}^2 x dx = \int \operatorname{tg} x d(\operatorname{tg} x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

Итак

$$F_1(x) = \frac{1}{2\cos^2 x} + C_1, \text{ а } F_2(x) = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2$$

$$\begin{aligned} F_1(x) - F_2(x) &= \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + C_2 = \frac{1}{\cos^2 x} + C_1 - \frac{1\sin^2 x}{2\cos^2 x} - C_2 = \\ &= \frac{1 - \sin^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \\ &= \frac{\cos^2 x}{2\cos^2 x} + C_1 - C_2 = \frac{1}{2} + C_1 - C_2 = C \end{aligned}$$

3. Изложенные методы интегрирования не всегда позволяют находить неопределенный интеграл. Такие интегралы называются неберущимися и их можно вычислить только приближенными методами.

$$\int \frac{\sin x}{x} dx - \text{интегральный синус}$$

$$\int \frac{\cos x}{x} dx - \text{интегральный косинус}$$

$$\int e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{интеграл Пуассона и т.д.}$$